



储油罐的变位识别与罐容表标定



1. 2010-A问题的提出

2. 问题的立意和背景

3. 椭圆罐的变位影响与标定分析

4. 大油罐的变位识别与标定分析

5. 竞赛论文中存在的主要问题

6. 结束语: 写在后面

2010.12杭州



一、CUMCM-2010A 问题的提出



一般 储油罐的变位识别与罐容表标定

通常加油站都有若干个储存燃油的地下储油罐，并且一般都有与之配套的“油位计量管理系统”，采用流量计和油位计来测量进/出油量与罐内油位高度等数据，通过预先标定的罐容表（即罐内油位高度与储油量的对应关系）进行实时计算，以得到罐内油位高度和储油量的变化情况。

许多储油罐在使用一段时间后，由于地基变形等原因，使罐体的位置会发生纵向倾斜和横向偏转等变化（称为变位），从而导致罐容表发生改变。按照有关规定，需要定期对罐容表进行重新标定。



一、CUMCM-2010A 问题的提出



- 图1是一种典型的储油罐尺寸及形状示意图，其主体为圆柱体，两端为球冠体。

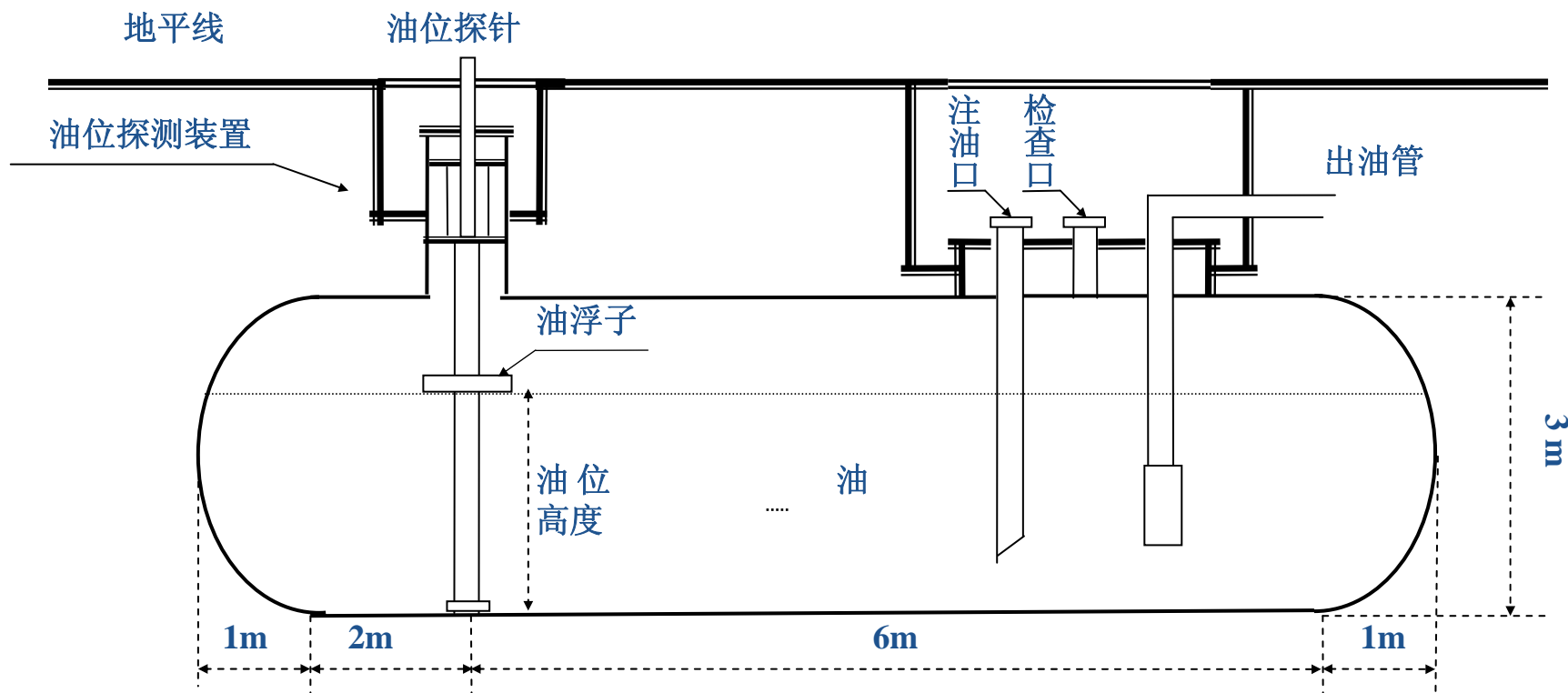


图1 储油罐正面示意图

请勿网上传播（韩中庚）



一、CUMCM-2010A 问题的提出



图2是其罐体纵向倾斜变位的示意图，图3是罐体横向偏转变位的截面示意图。

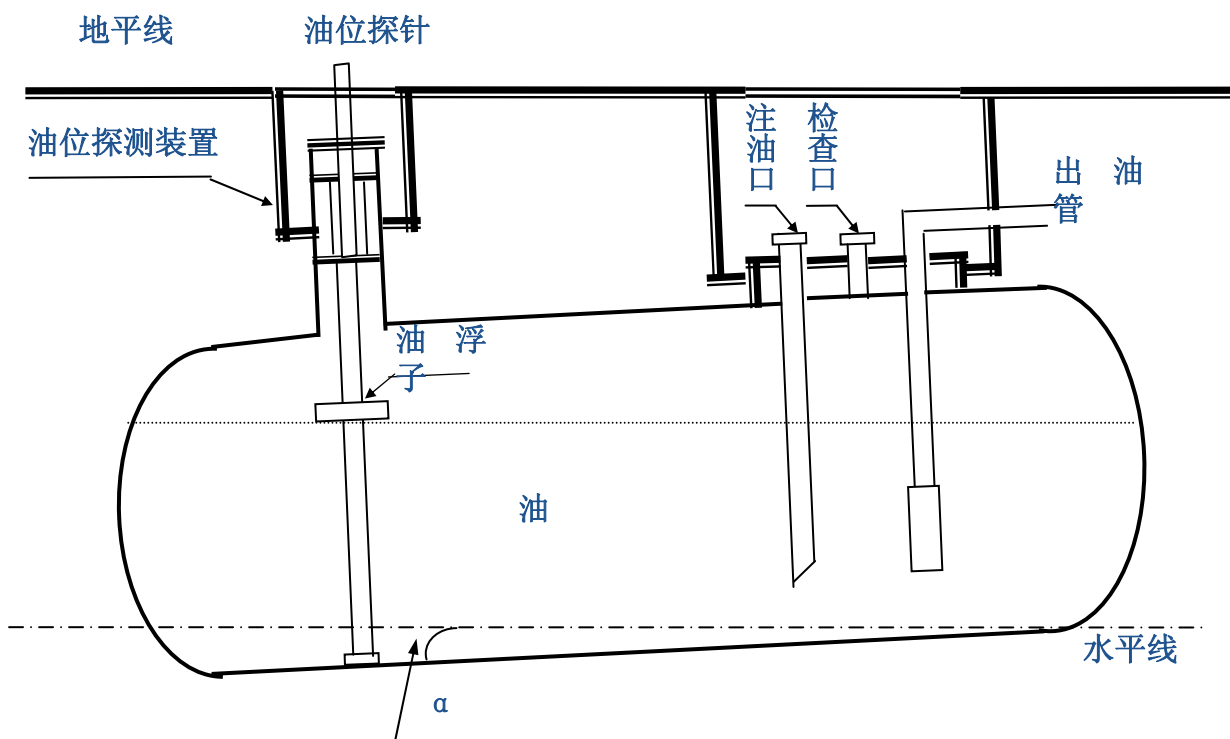
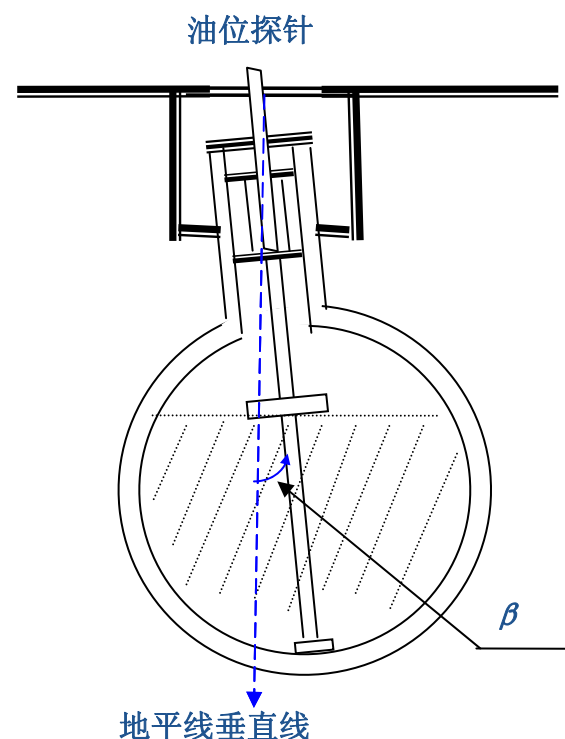


图2 储油罐纵向倾斜变位后示意图



(b) 横向偏转倾斜后正截面图



一、CUMCM-A 问题的提出



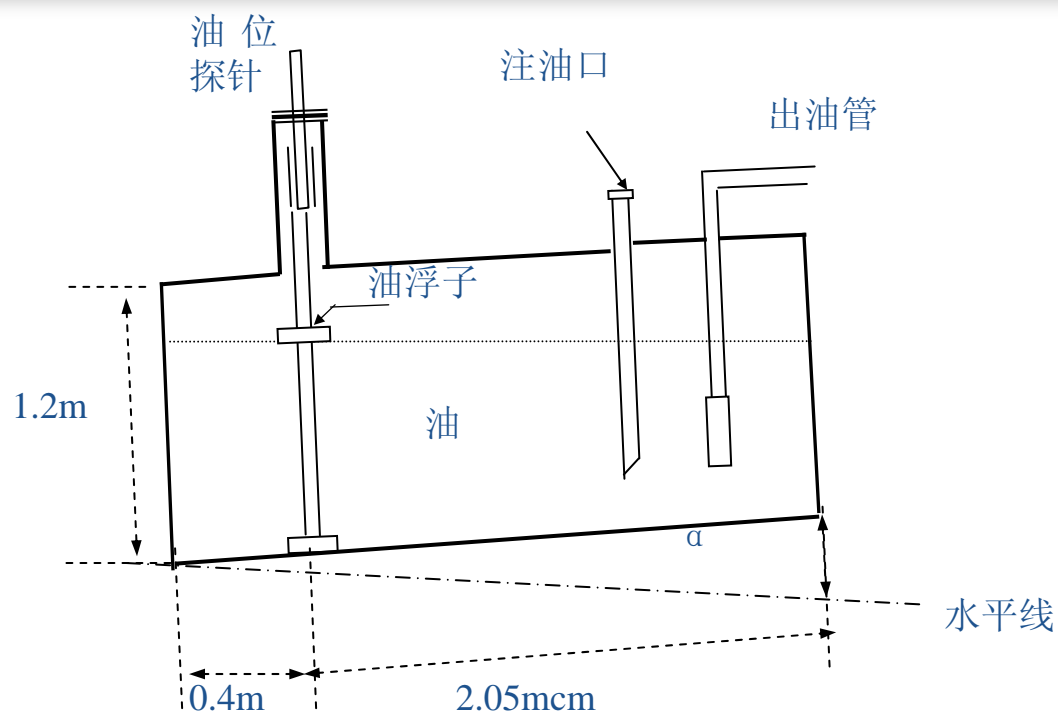
请你们用数学建模方法研究解决储油罐的变位识别与罐容表标定的问题：

(1) 为了掌握罐体变位后对罐容表的影响，利用如图4的小椭圆型储油罐（两端平头椭圆柱体），分别对罐体无变位和倾斜角为 $\alpha=4.10$ 的纵向变位两种情况做了实验，实验数据如附件1所示。

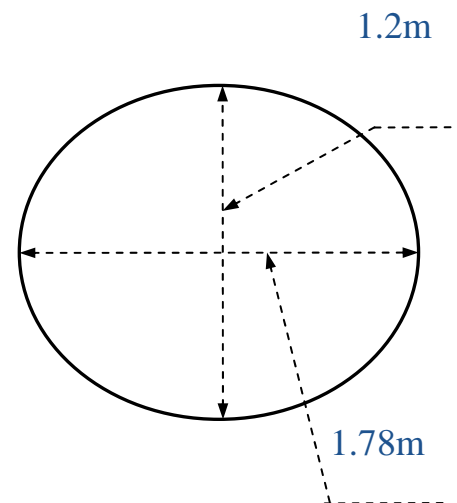
请建立数学模型研究罐体变位后对罐容表的影响，并给出罐体变位后油位高度间隔为1cm的罐容表标定值。



一、CUMCM-A 问题的提出



(a) 小椭圆油罐正面示意图



(b) 小椭圆油罐截面示意图

图4 小椭圆型油罐形状及尺寸示意图

你这是真的吗？





一、CUMCM-A 问题的提出



(2) 对于图1所示的实际储油罐，试建立罐体变位后标定罐容表的数学模型，即罐内储油量与油位高度及变位参数（纵向倾斜角度 α 和横向偏转角度 β ）之间的一般关系。

请利用罐体变位后在进/出油过程中的实际检测数据（附件2），根据你们所建立的数学模型确定变位参数，并给出罐体变位后油位高度间隔为10cm的罐容表标定值。

进一步利用附件2中的实际检测数据来分析检验你们模型的正确性与方法的可靠性。





二、问题的立意与背景



注油：一次性连续进行的，数量已知，但罐内总会有一定的剩余油量。

出油：加油机对外加油进行的，油量已知。
油罐内储油量的“理论值”与显示值总是有一定的偏差。

“理论值=注入量 - 出油量”

显示值：通过油浮子的高度和油罐的形状尺寸计算出来的，即管理系统中显示的剩余油量。

实际中，计量显示值大于（或小于）理论值，而且往往会超出了因正常的误差容许范围，随着时间的增长误差会越来越大。



二、问题的立意与背景



主要原因：因为罐体的变位导致了油浮子显示高度的偏差，即比正常位置升高或降低使得系统产生的计算误差，从而使得油罐的罐容表发生了变化，这就需要判断识别罐体的变位情况，来重新标定罐容表。

研究目标：如何通过建模分析来修正这个计量误差。

罐体变位：纵向水平倾斜变位、横向偏转倾斜变位和两种情形同时发生。

首先判断如何变位？然后根据不同的罐体变位情况，给出修正计算的模型，并重新标定罐容表。



二、问题的立意与背景



目前，罐容表的标定工作都是靠人工或半人工的操作方法实现，必须在加油站停工条件下进行，操作程序复杂，技术要求高，时间周期长，既影响加油站的正常运转，也需要较高的经济成本，同时也不可避免地会有一定的系统误差和测量误差。

人工标定：**GB/T17605-1998**

半人工标定：**加油站储油罐标定车**

通过建模分析，正确识别罐体变位参数，实时修正罐容表，这是非常有实际意义的研究课题。



二、问题的立意与背景



问题的两大部分:

(1) 为观察检验罐体变位对罐容表的影响效果, 在已知变位参数的情况下, 检测出油位高度和油量的对应数值, 建模分析罐容表的变化规律, 并要求给出修正的罐容表标定值---“**正问题**”。

(2) 根据实际储油罐的实际检测数据, 要求正确地识别罐体是如何变位的? 具体变了多少? 同时要求给出罐容表的修正标定模型和结果---“**反问题**”。

为什么设第一部分? 实验数据多余? 还是误导?

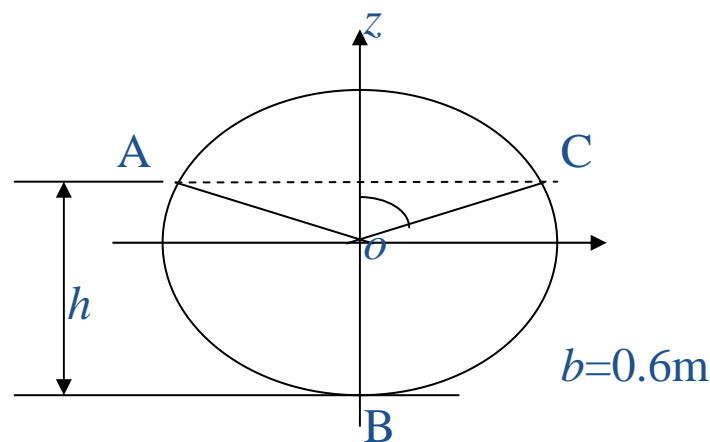
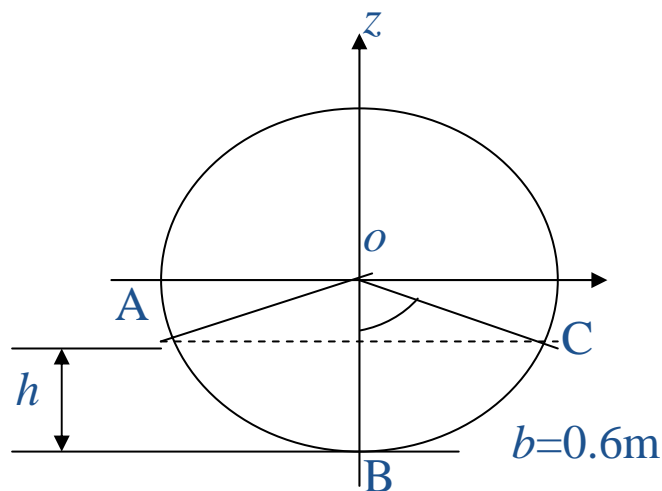


三、椭圆型油罐的变位影响分析方法



根据椭圆罐的几何形状和尺寸，对于无变位情况下油位高度与储油量的计算公式和罐容表对应值，计算方法容易实现。

分低油位和高油位的两种情况：





三、椭圆型油罐的变位影响分析方法



椭圆型油罐无变位不同油位高度与储油量关系:

$$V = \left[\frac{1}{2} \pi ab + \frac{a}{b} (h-b) \sqrt{2bh - h^2} + ab \arcsin \frac{h-b}{b} \right] L,$$

其中 $a = 0.89, b = 0.6, L = 2.45$ (m) 分别为罐体截面椭圆的长半轴、短半轴和罐体长度, h 为罐内的油位高度。

表 1: 正常情况下小椭圆罐的罐容表部分结果

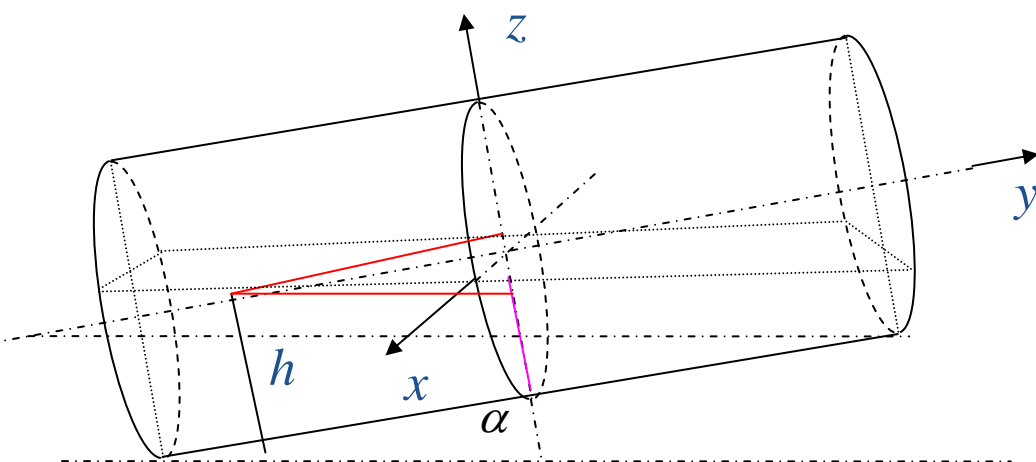
油位高度/cm	油量/L	油位高度/cm	油量/L	油位高度/cm	油量/L	油位高度/cm	油量/L
10	163.59	40	1199.31	70	2489.15	100	3659.88
20	450.27	50	1621.00	80	2910.84	110	3946.55
30	803.54	60	2055.07	90	3306.61	120	4110.15



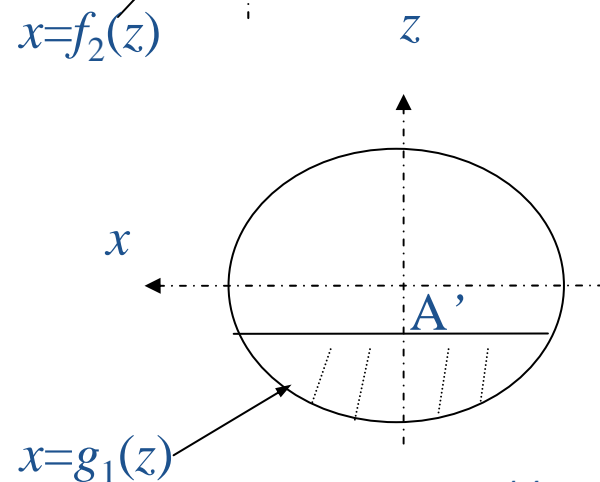
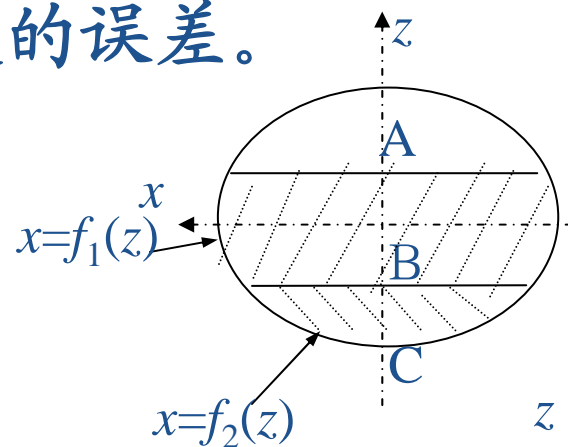
三、椭圆型油罐的变位影响分析方法



对于罐体纵向变位角4.1度的情况，如果直接用罐内油浮子的高度来计算油量，则显然是不准确的，与实际的储油量将会有一定的误差。



$$H = h - \left(\frac{L}{2} - 0.4\right) \cdot \tan \alpha = h - 0.825 \cdot \tan \alpha$$





三、椭圆型油罐的变位影响分析方法



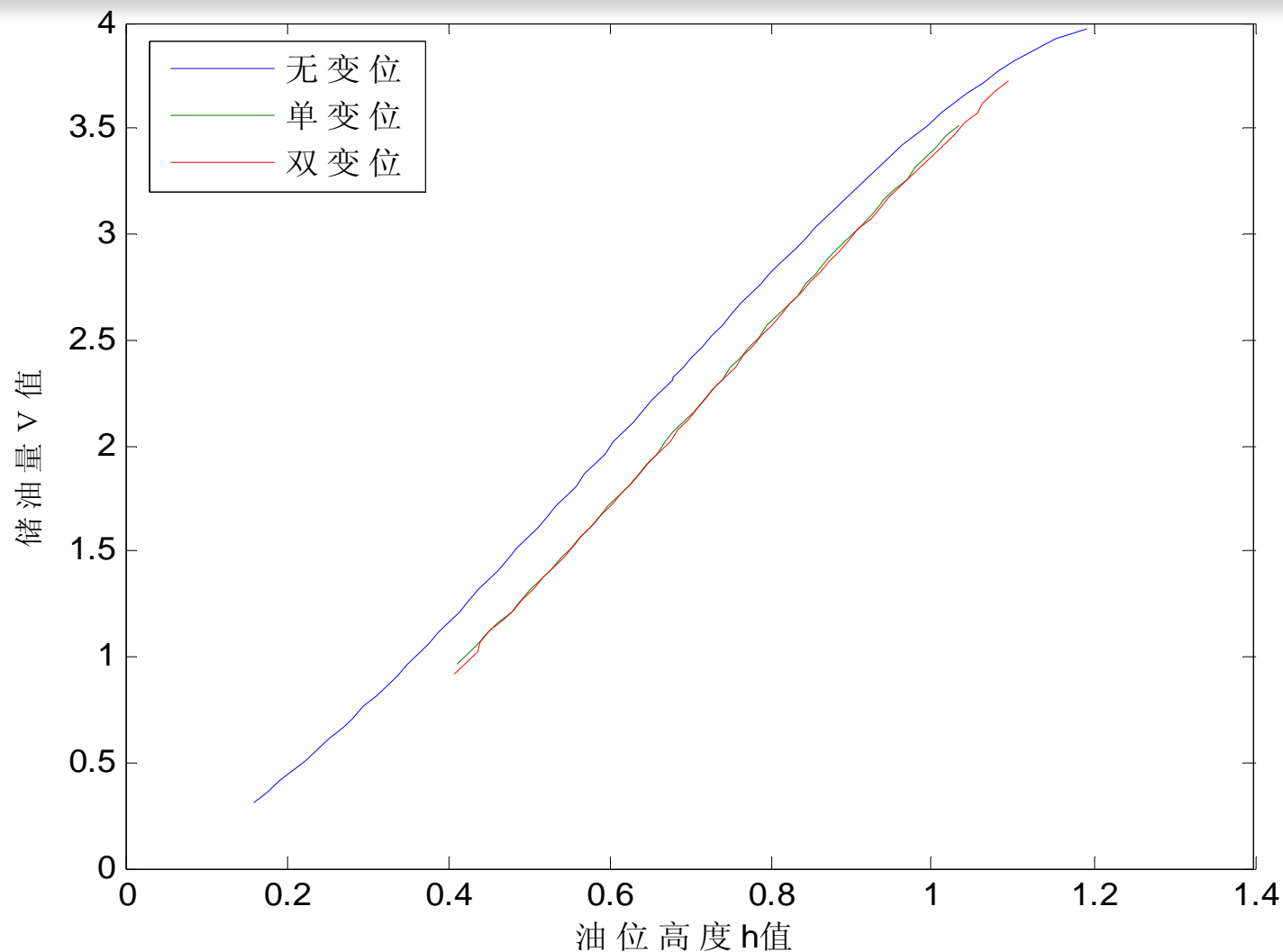
类似地方法可以得计算公式，代入参数计算可得修正后的结果，并与无变位情况比较。

高度/cm	无变位油量值/L	变位油量修正值/L	修正误差/L	相对误差比率	高度/cm	无变位油量值/L	变位油量修正值/L	修正误差/L	相对误差比率
10	163.59	70.13	93.47	1.3308	70	2489.15	2232.50	256.65	0.1150
20	450.27	281.86	168.41	0.5975	80	2910.84	2661.42	249.42	0.0937
30	803.54	595.25	208.29	0.3499	90	3306.61	3072.43	234.18	0.0762
40	1199.31	965.66	233.64	0.2420	100	3659.88	3450.72	209.16	0.0606
50	1621.00	1371.88	249.12	0.1816	110	3946.55	3776.64	169.92	0.0450
60	2055.07	1798.52	256.55	0.1426	120	4110.15	4012.74	97.40	0.0243

纵向倾斜变位对罐容表的影响是非常明显，最大误差在**257L**以上，平均误差达到**190L**以上，平均相对误差达**30%**以上。



三、椭圆型油罐的变位影响分析方法



可以直接用实验数据做拟合分析，同样得到类似的直观结果。





四、实际油罐的变位识别与标定方法



根据油罐的几何形状和尺寸，计算得到无变位情况的油位高度与油量的一般模型。

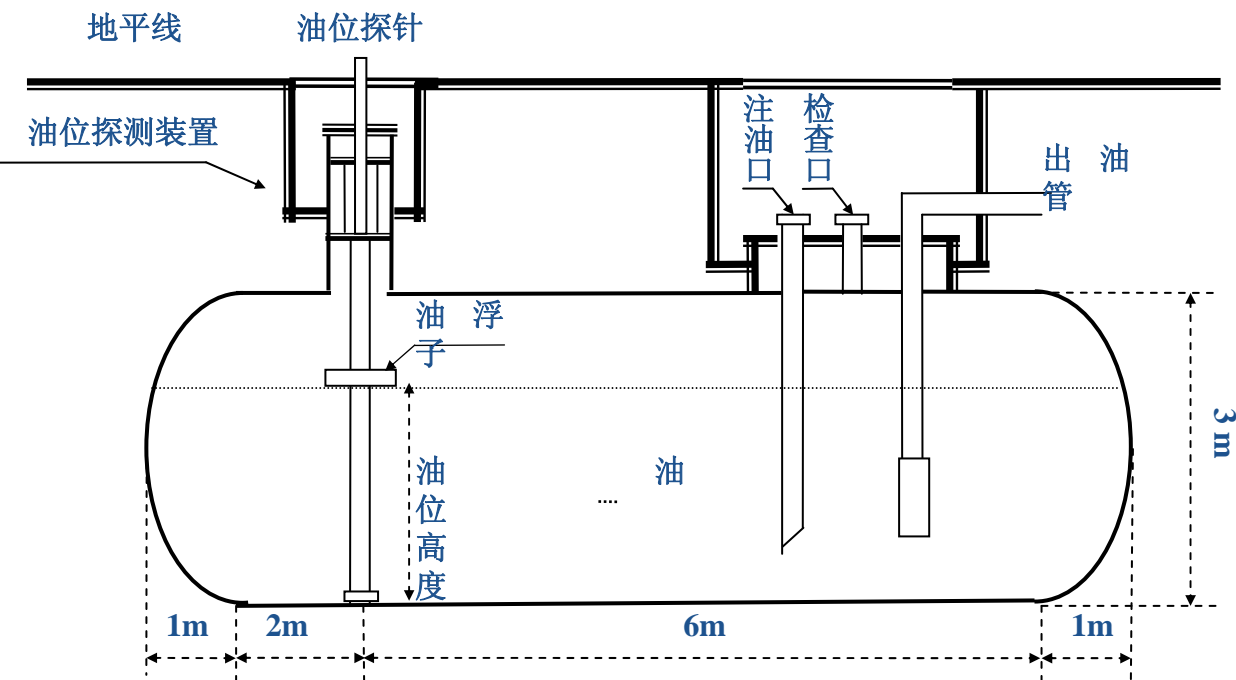
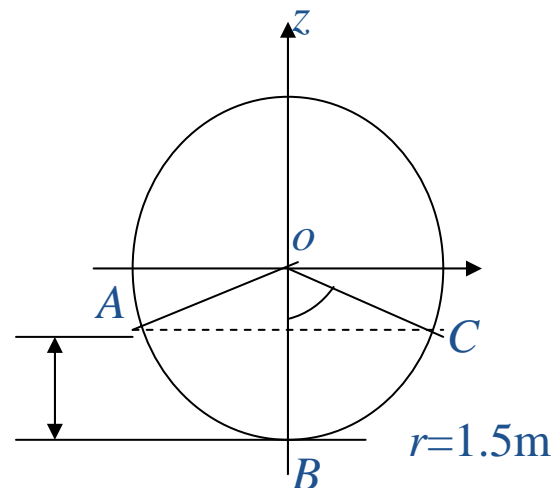
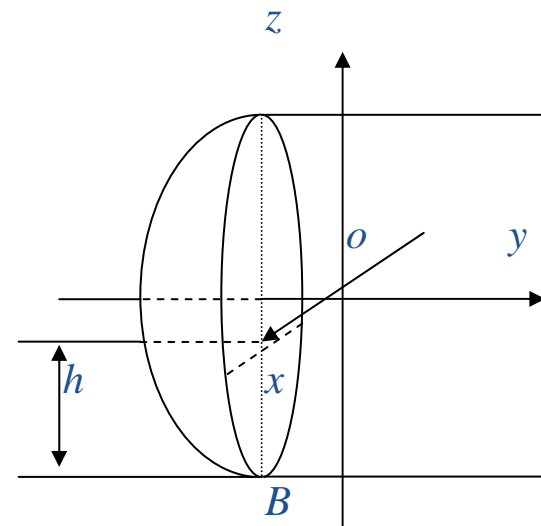
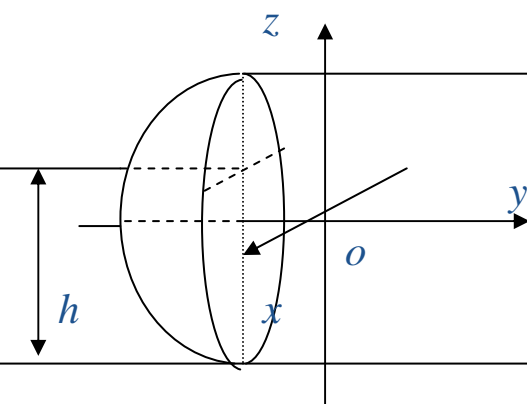
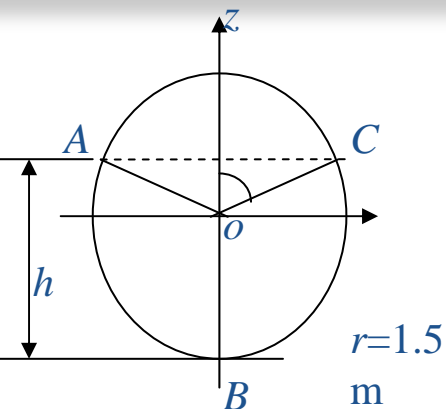


图1 储油罐正面示意图





四、实际油罐的变位识别与标定方法



$$V = \begin{cases} (L+1-R) \left[r^2 \arccos \frac{r-h}{r} - (r-h) \sqrt{2hr-h^2} \right] \\ + 2 \int_{-r}^{-r+h} (R^2 - z^2) \arccos \frac{R-1}{\sqrt{R^2 - z^2}} dz, & h \leq r, \\ \pi r^2 (L+1) + \frac{\pi}{3} + (L-R+1) \left[(h-r) \sqrt{2hr-h^2} - r^2 \arccos \frac{h-r}{r} \right] \\ - 2 \int_{h-r}^r (R^2 - z^2) \arccos \frac{R-1}{\sqrt{R^2 - z^2}} dz, & h > r. \end{cases}$$

其中 $r=1.5, L=8, R=\frac{r^2+1}{2}=1.625$ (单位 m),

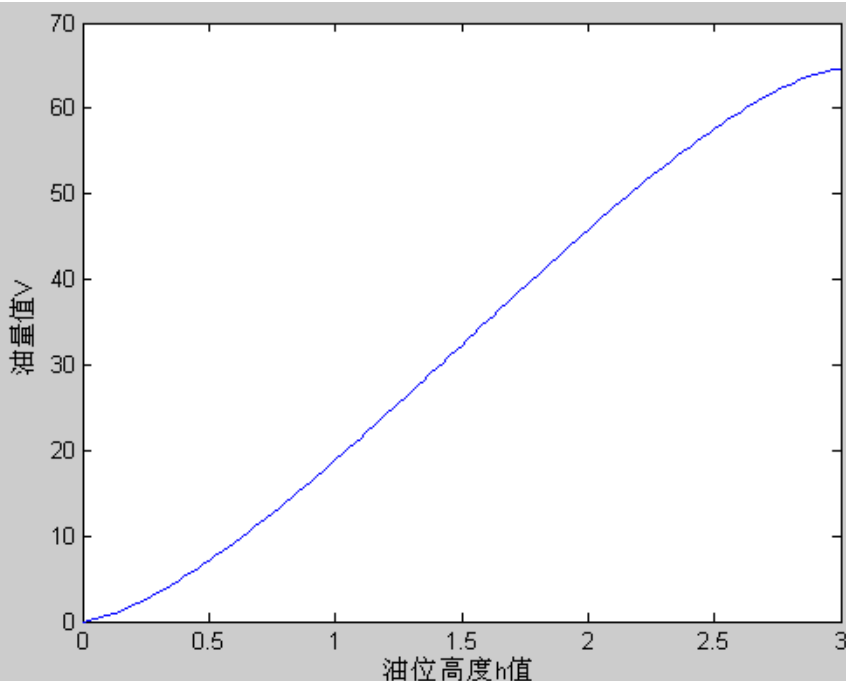


四、实际油罐的变位识别与标定方法



表 1: 正常情况下油罐的罐容表

油位高度 $h(\text{m})$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
油量值 $V(\text{L})$	590.71	1682.06	3101.87	4783.00	6682.45	8767.91	11012.93	13394.65	15892.57	18487.88
油位高度 $h(\text{m})$	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
油量值 $V(\text{L})$	21162.92	23900.88	26685.57	29501.18	32332.19	35163.15	37978.76	40763.45	43501.41	46176.46
油位高度 $h(\text{m})$	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
油量值 $V(\text{L})$	48771.78	51269.71	53651.43	55896.45	57981.93	59881.39	61562.53	62982.36	64073.72	64664.45



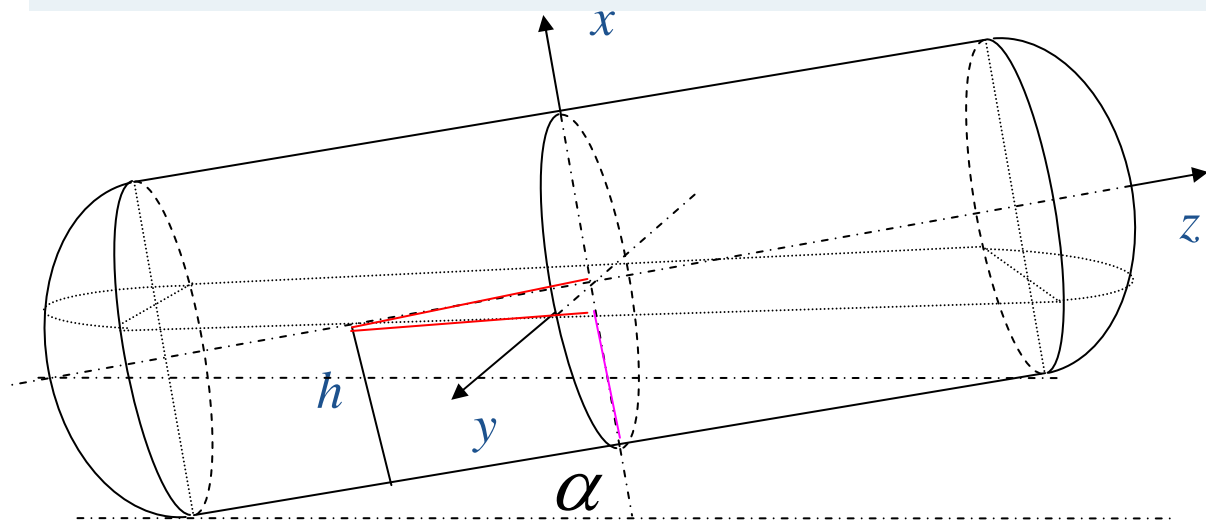
这里是否需要计算无变位的情况呢？事实上，无变位情况的罐容表就是出厂时的罐容表。后面可以与变位后的情况进行比较分析修正的效果。



四、实际油罐的变位识别与标定方法



罐体位置发生纵向水平倾斜 α 的情况，在罐内油位实际显示高度 h 比正常位置的高度要高一定的数值 $h_1(\geq 0)$ ，其具体的 h_1 数值与油位高度 h 的大小有关。



罐内油量计算的具体方法与罐内油位高度有关，下面分两种情况分别讨论。

$$H = h - \left(\frac{L}{2} - 2\right) \cdot \operatorname{tg} \alpha = h - 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

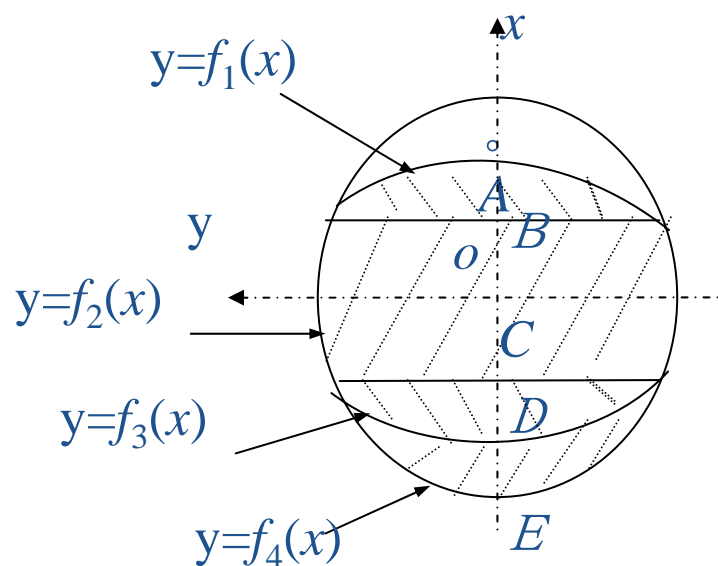


四、实际油罐的变位识别与标定方法



(1) 油罐的两侧球冠内都有油的情况

考虑油面在 xoy 面上的投影区域，即 xoy 面上的截面区域，不同的油位高度对应的区域有所不同。



根据罐内各部分油的容积在 xoy 面上的投影可分为四个部分，各部分的边界线 x 轴的交点分别为 $A(x_A, 0), B(x_B, 0), C(x_C, 0), D(x_D, 0), E(x_E, 0)$ ，四条边界曲线方程分别记为 $y = f_1(x), y = f_2(x), y = f_3(x), y = f_4(x)$ 。



四、实际油罐的变位识别与标定方法



(1) 油罐的两侧球冠内都有油的情况

$$\begin{aligned} V = & 2 \int_{x_B}^{x_A} [(-x+H-r)\operatorname{ctg}\alpha + 3.375] f_1^+(x) dx + 2 \int_{x_B}^{x_A} dx \int_0^{f_1^+(x)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy \\ & + 2 \int_{x_C}^{x_B} [(-x+H-r)\operatorname{ctg}\alpha + 3.375] f_2^+(x) dx + 2 \int_{x_C}^{x_B} dx \int_0^{f_2^+(x)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy \\ & + 13.5 \int_{-r}^{x_C} f_4^+(x) dx + 4 \int_{-r}^{x_C} dx \int_0^{f_4^+(x)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy \\ & - 2 \int_{x_D}^{x_C} [(x+r-H)\operatorname{ctg}\alpha + 3.375] f_3^+(x) dx - 2 \int_{x_D}^{x_C} dx \int_0^{f_3^+(x)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy, \end{aligned}$$

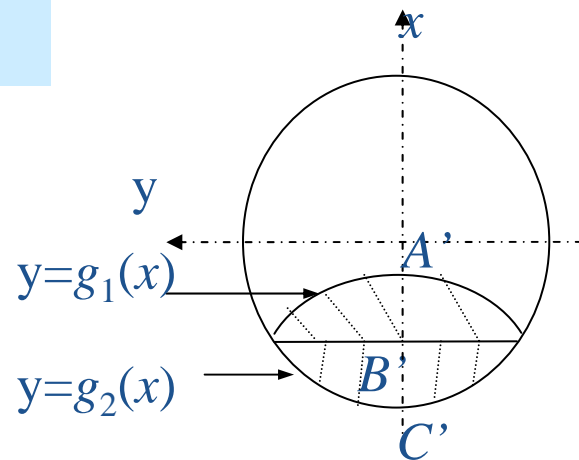


四、实际油罐的变位识别与标定方法



(2) 油罐下沉一侧球冠内有油的情况

考虑油面在 xoy 面上的投影区域，即 xoy 面上的截面区域。



$$V = 2 \int_{x_B}^{x_{A'}} [(-x + H - r) \operatorname{ctg} \alpha + 3.375] g_1^+(x) dx + 2 \int_{x_B}^{x_{A'}} dx \int_0^{g_1^+(x)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy \\ + 2 \int_{-r}^{x_B} [(-x + H - r) \operatorname{ctg} \alpha + 3.375] g_2^+(x) dx + 2 \int_{-r}^{x_B} dx \int_0^{g_2^+(x)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy$$



四、实际油罐的变位识别与标定方法



(3) 罐体发生纵向水平倾斜和横向偏转倾斜情况

在考虑纵向水平倾斜 α 角和横向偏转倾斜 β 角对罐内储油量的影响时，只要用

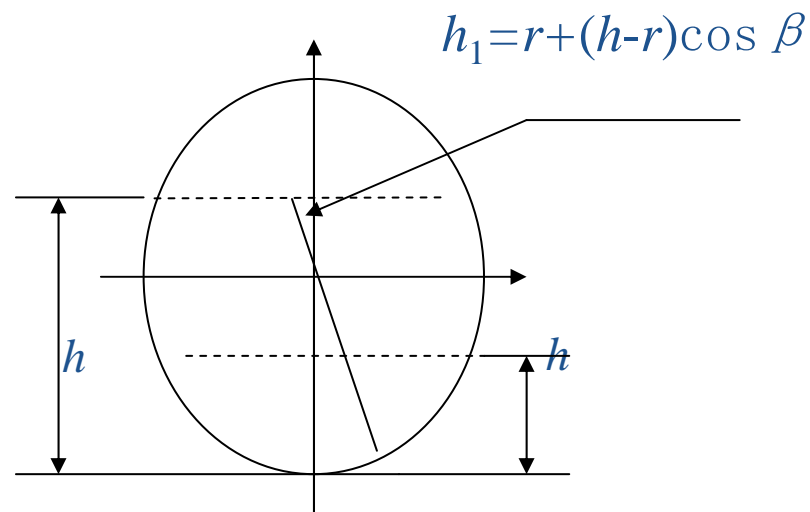
$h_1 = r + (h - r) \cos \beta$ 来代替前面的 h 即可，即

$H = r + (h - r) \cos \beta - 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha$ 。

利用上面的结果就得到相应的油量容积。

对于不同的 α 和 β 取值，则有一般的储油量容积模型：

$$V = V(h, \alpha, \beta)$$





四、实际油罐的变位识别与标定方法



(4) 变位参数识别方法

由于附件2所给的数据是在同一个变位状态下检测得到的，即在数据检测过程中罐体是稳定的，亦即所有数据是针对一组变位参数得到的。

因罐内中油量初始值是未知的，所以单从不准确的油位高度和显示储油量的对应关系不能反应出罐体变位特征。

一段连续时间段内的**进出油量**变化和显示**油位高度**变化的对应关系能够反应出罐体的变位特征。



四、实际油罐的变位识别与标定方法

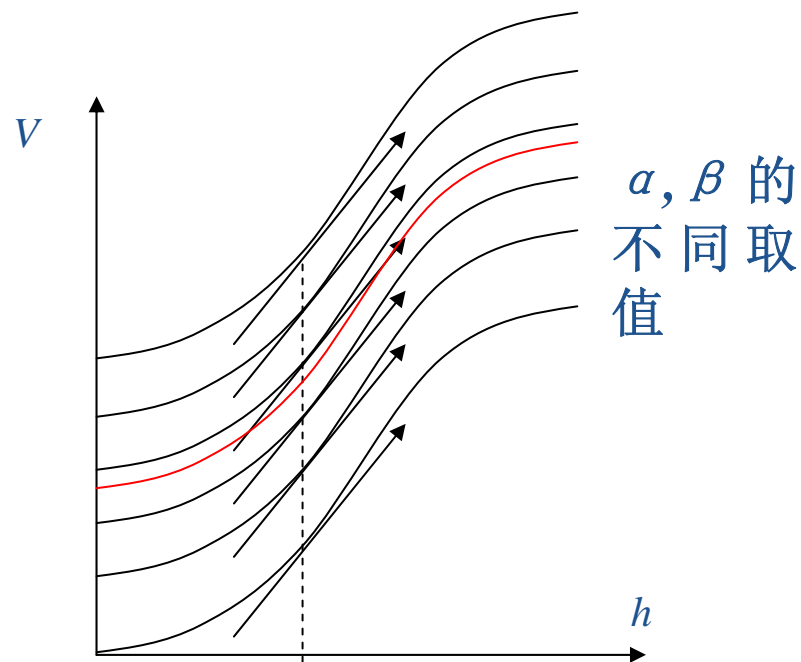


(4) 变位参数识别方法

对于不同的 α 和 β 取值，由确定函数表达式 $V=V(h, \alpha, \beta)$ 的图像是一族同类型的曲线。实际上就是寻找一组参数 α 和 β 确定出一条与实际最接近的曲线。

因为不知道实际中一个油位高度 h 对应的油量值 V 的准确值，注意到同一个 h 对应的曲线上的切线斜

率是相同的，切线斜率近似用 $\frac{\Delta V}{\Delta h}$ 。





四、实际油罐的变位识别与标定方法



(4) 变位参数识别方法

利用各时间段的进出油量值 ΔV_i 及相应油位高度改变量 Δh_i 的对应关系，同时将油位高度值 h_i 代入模型 $V=V(h, \alpha, \beta)$ 中，计算得到 $V'_i=V(h_i, \alpha, \beta)$ ，从而得到 $\Delta V'_i=V'_i-V'_{i+1}$, $\Delta h_i=h_i-h_{i+1}(i \geq 1)$ 。

通过适当最小二乘准则，利用部分数据编程计算得到变位参数 α 与 β 的估计值。

$$(1) \min_{\alpha, \beta} S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta V_i}{\Delta h_i} - \frac{\Delta V'_i}{\Delta h_i} \right)^2; \quad (2) \min_{\alpha, \beta} S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n (\Delta V_i - \Delta V')^2;$$

$$(3) \min_{\alpha, \beta, V_0} S(\alpha, \beta, V_0) = \sum_{i=1}^n (V_i + V_0 - V(h_i, \alpha, \beta))^2,$$



四、实际油罐的变位识别与标定方法

(4) 变位参数识别方法

求解方法：(1) 在给定参数一定的范围内做遍历搜索，或分步搜索、部分搜索等；

(2) 直接调用 MATLAB 的相关函数（如 `lsqnonlin`）；

(3) 借助于其它的数值启发式算法。

变位参数 $\alpha = 2.1^0$ ， $\beta = 4.3^0$ 左右，用不同方法可能有些偏差。通过检验可知，模型对 α 的变化非常敏感，而对 β 的变化非常不敏感。

再利用剩余部分数据对模型的可靠性和结果稳定性进行分析检验。



四、实际油罐的变位识别与标定方法



(5) 其他可行的方法

- 1) 采用工程上常用的网格分割法，对罐内的油量容积做近似的数值计算；
- 2) 利用无变位油罐内油量的计算公式，用解析几何坐标旋转的方法，得到变位后的储油量计算公式；
- 3) 用MATLAB函数求积分和变位参数的反演估计；
- 4) 用Taylor多项式来近似表示复杂的积分表达式；
- 5) 将储油罐两端的球冠体近似等价于半椭球体，或圆柱体来简化计算，得到近似的结果。
- 6) 根据罐体变位的几何特征，几何形体中心总有一个不动点，即是变位对油量影响的最大的点。此方法灵敏度太高，无一般性应用价值。

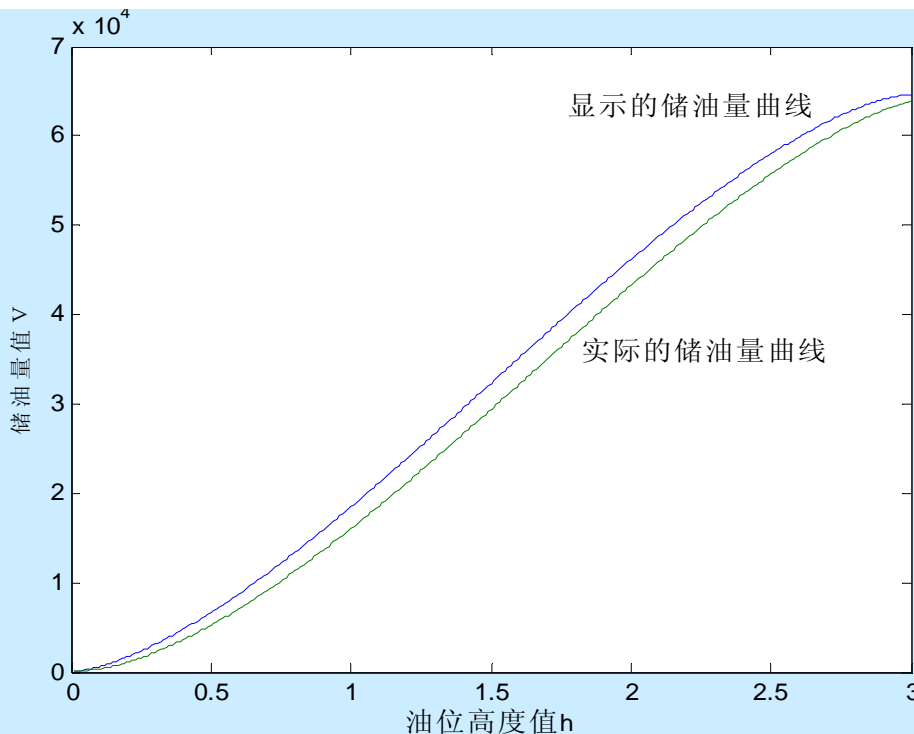


四、实际油罐的变位识别与标定方法



(6) 变位后罐容表的标定结果

将罐体变位参数 $\alpha_0 = 2.11^\circ$ ， $\beta_0 = 4.31^\circ$ 代入修正计算模型，针对油位实际显示高度值 h ，则可修正计算出对应的油量精确值及修正误差分析。



计算结果：最大的误差在**2102升**以上，通常的误差比率达都在**2~50%**以上，最大误差达到**60%**以上，平均误差量为**1589.17升**，平均误差比率为**12.81%**。



五、竞赛中存在的主要问题



- 1) 实际的问题和实际的数据，实际的需求，也许是过于实际的原故，很多人对问题不理解或有偏差。结果不合实际，太离普了。
- 2) 有人不理解罐容表是什么？犯了低级的错误。
- 3) 有人习惯了做数学应用题的思维，似乎应该是题目所给的条件和数据都得恰到好处，题目给的数据用不上好像就不对。缺少对数学建模思想的理解。
- 4) 有人为了用数据而凑方法，解决问题缺少针对性，更不符合实际要求。狭义的思维方法。
- 5) 某些论文有编造模型和结果之嫌。学术不端。





五、竞赛中存在的主要问题



问题（1）存在的主要问题

- （1）有的参赛队并没有把握问题的实质，只讨论所给实验数据的精度和误差。自始至终都没有说明罐体变位对罐容表的有什么影响。
- （2）有的队不知道要先计算出无变位的罐容表，并与变位的情况进行比较来说明变位的影响。
- （3）很多论文所给出的罐容表均不完整，严格的讲不能算是罐容表，数值结果偏差较大。
- （4）有一部分论文中使用的是多项式拟合的方法，因为缺少两端的数据，没做好外沿的处理，最后没有给出完整的罐容表标定值。



五、竞赛中存在的主要问题



问题（2）存在的主要问题

（1）有的论文利用直接的计算方法，没有按油位高度的不同分步表示罐内油量的容积公式，或积分表达式不准确，导致标定模型的错误，从而使整个问题的结果偏离实际。微积分应用基本功问题。

（2）有不少的论文使用了不正确的最小二乘准则，即使用附件 2 的

显示油位高度与油量数据直接用
$$\min_{\alpha, \beta} S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n (V_i - V(h_i, \alpha, \beta))^2$$

做反演计算，即利用错误的数据和错误的准则，得到错误的结论。

低级错误。



五、竞赛中存在的主要问题



问题（2）存在的主要问题

（3）有的是储油量的计算模型错误，也有的是求解算法错，参数辨识结果太离谱，纵向倾斜角达5度以上，完全不合实际。

（4）有些论文没有对模型和结果做可靠性分析，因为他们在做参数估计时将所有数据都用上了，所以后面就不知道如何来做检验分析了。

（5）有些论文是用近似方法，但没有给出完整的罐容表标定值，有的偏差也较大，也没做相应的误差分析，结果的可信度差。





六、结束语：写在后面



今年作为A题的命题人，自从2008年接触到这个实际问题，一直在做相关问题的调查研究工作。之后多次到加油站和企业调查、做实验，了解掌握了问题的实质和需求，加油站管理系统的工作原理和罐容表的形成及标定方法等。在题目的形成过程中，经过了专家们反复修改，力求保持问题和数据的实际原型，也要考虑到竞赛的特点。

我们倡导通过数学建模活动让学生真正感受到所学知识有用，用数学真的能够解决实际问题，数学建模能为企业解决实际问题。特别是用微积分的方法也能解决实际问题，也是有象征意义、有代表性的一个赛题。

赛后，有一些老师和同学还在兴致勃勃继续讨论和研究相关问题，发表对问题的看法和做法，也都是很有意义的。



谢谢大家



请勿随意上传互联网!